Vybrané nerovnosti v analýze metod rozložení oblasti

Petr Vodstrčil
petr.vodstrcil@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Ostrava, 31.1. 2025

(SNA 2025)

Obsah přednášky

Modelová úloha

Uvažujme modelovou úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{$\clubsuit$}$$

kde $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ a $f \in L^2(\Omega)$.

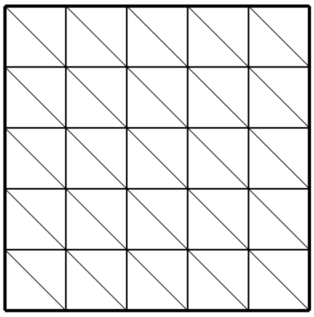
Slabým řešením úlohy ($\clubsuit$) rozumíme funkci $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ splňující

$$(\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)) : \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Toto slabé řešení je zároveň i řešením úlohy na nalezení

$$\operatorname*{arg\,min}_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Triangulace $\overline{\Omega}$ a prostory $V^h(\Omega)$ a $V_0^h(\Omega)$



$(h = \frac{1}{5})$

Označme $x_1, x_2, \ldots, x_m$, kde $m = \left(\frac{1}{h} + 1\right)^2$, uzly triangulace $\overline{\Omega}$.

Tyto uzly si seřadíme tak, aby na prvních $m_I = \left(\frac{1}{h} - 1\right)^2$ pozicích byly uzly vnitřní a na zbývajících $m_B = \frac{4}{h}$ pozicích byly uzly hraniční.

Uvažujme bázi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ prostoru $V^h(\Omega)$ s následujícími vlastnostmi:

- Každá z funkcí φ_i je spojitá a po částech lineární na $\overline{\Omega}$.
- $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Je-li $u^h \in V^h(\Omega)$ taková, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ platí $u^h(x_i) = u_i$,

pak $u^h = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + \cdots + u_m\varphi_m$.

Poznamenejme ještě, že funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m_I}$ tvoří bázi prostoru $V_0^h(\Omega)$.

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je matice s prvky $a_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i(x) \cdot \nabla\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x$ (matice tuhosti) a $b \in \mathbb{R}^m$ je vektor o složkách $b_j = \int_\Omega f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x$.

Pak platí

$$\int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2\,\mathrm{d}x = u^T A u \quad \text{a} \quad \int_\Omega f(x)u^h(x)\,\mathrm{d}x = b^T u.$$

Bude užitečné matici A chápat jako blokovou matici $A = \begin{bmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ A_{BI} & A_{BB} \end{bmatrix}$.

A_{II} je typu $m_I \times m_I$, A_{IB} je typu $m_I \times m_B$, A_{BI} je typu $m_B \times m_I$ a A_{BB} je typu $m_B \times m_B$.

Stejně tak bude užitečné psát $b = \begin{bmatrix} b_I \\ b_B \end{bmatrix}$, případně $u = \begin{bmatrix} u_I \\ u_B \end{bmatrix}$.

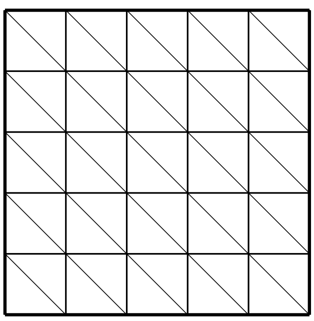
Vlastnosti matice A

- Matice A je pozitivně semidefinitní.
- Jádro matice A má dimenzi 1 a je generováno vektorem samých jedniček.
- Matice A_{II} je pozitivně definitní, a tedy i regulární.

Aproximace řešení modelové úlohy v prostoru $V_0^h(\Omega)$

Hledáme

$$\operatorname*{arg\,min}_{u^h \in V_0^h(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)u^h(x)\,\mathrm{d}x \right).$$



$(h = \frac{1}{5})$

Úlohu lze přeformulovat jako problém hledání

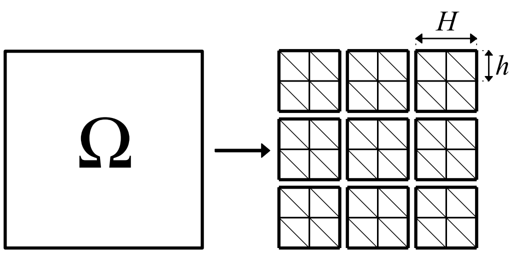
$$\operatorname*{arg\,min}_{u_I \in \mathbb{R}^{m_I}} \left(\frac{1}{2} u_I^T A_{II} u_I - b_I^T u_I \right),$$

případně řešení soustavy $A_{II} u_I = b_I$.

Poznámka

Číslo podmíněnosti matice A_{II} je řádově $\frac{1}{h^2}$. Řešení může být (pro malá h) výpočetně náročné a navíc těžko paralelizovatelné.

Metoda TFETI



$A = \mathrm{diag}(A^1, \dots, A^s)$, kde $s = \frac{1}{H^2}$,

A^i je pozitivně semidefinitní (rozměru $\left(\frac{H}{h}+1\right)^2$),

Ker A^i je generováno vektorem samých jedniček.

V matici $B = \left[B^1,\, B^2,\, \dots,\, B^s\right]$ jsou obsaženy podmínky lepení podoblastí a lze ji zvolit tak, aby měla ortonormální řádky.

Řešíme úlohu na nalezení $\quad \displaystyle\arg\min_{Bu=0} \left(\frac{1}{2}u^T Au - b^T u\right).$

Lagr. multiplikátory: $\boxed{\begin{aligned} Au + B^T\lambda &= b,\\ Bu &= 0\end{aligned}} \quad \xRightarrow{AA^+A=A} \quad \boxed{\begin{aligned} u &= A^+(b - B^T\lambda) + \underbrace{R\alpha}_{\in \mathrm{Ker}\, A},\\ Bu &= 0.\end{aligned}}$

Odtud $BA^+(b - B^T\lambda) + BR\alpha = 0$ a navíc $R^T(b - B^T\lambda) = 0$. Druhá rovnost plyne z faktu, že obor hodnot symetrické matice A je kolmý na její jádro.

$BA^{+}(b - B^T\lambda) + BR\alpha = 0, \quad R^T(b - B^T\lambda) = 0$

Zavedeme-li označení

$$F = BA^{+}B^T, \quad G = -R^TB^T, \quad \widetilde{d} = BA^{+}b, \quad e = -R^Tb,$$

dostaneme (po drobných úpravách) soustavu $\boxed{\begin{aligned} F\lambda + G^T\alpha &= \widetilde{d}, \\ G\lambda &= e. \end{aligned}}$

S použitím substituce $\lambda = \mu + \lambda_0$, kde λ_0 je libovolný vektor splňující podmínku $G\lambda_0 = e$, dostaneme soustavu $\boxed{\begin{aligned} F\mu + G^T\alpha &= d, \\ G\mu &= 0. \end{aligned}}$ $\quad (d = \widetilde{d} - F\lambda_0)$

Místo řešení této soustavy můžeme hledat $\arg\min\limits_{\mu \in \operatorname{Ker} G} \theta(\mu)$, kde $\theta(\mu) = \frac{1}{2}\mu^T F\mu - d^T\mu$.
To je stejné jako minimalizovat (bez omezení) funkci $\theta(P\mu) = \frac{1}{2}\mu^T P^T FP\mu - d^T P\mu$, kde $P = I - G^T(GG^T)^{-1}G$ je (symetrická) matice projekce na $\operatorname{Ker} G$.

Pro vyřešení minimalnizační úlohy tedy stačí řešit soustavu $\boxed{PFP\mu = Pd}$.

Schurův doplněk – obecný koncept

Mějme čtvercovou matici $A = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}$, kde bloky K a N jsou čtvercové matice a předpokládejme navíc, že matice K je regulární.

Představme si, že řešíme soustavu

$$\begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Tu si můžeme rozepsat do tvaru

$$\begin{aligned} Kx + Ly &= u, \\ Mx + Ny &= v. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme (matice K je regulární) vztah $x = K^{-1}(u - Ly)$. Dosazením tohoto vztahu do druhé rovnice dostaneme $MK^{-1}(u - Ly) + Ny = v$, což si lze přepsat jako

$$(N - MK^{-1}L)y = v - MK^{-1}u.$$

Schurův doplněk S bloku K definujeme rovností $S = N - MK^{-1}L$.

Schurův doplněk a vztah k zobecněné inverzi

Uvažujme libovolnou matici A^+ splňující podmínku $AA^+A = A$. Matici A^+ chápejme jako blokovou matici

$$A^+ = \begin{bmatrix} \widetilde{K} & \widetilde{L} \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix}$$

se stejnou blokovou strukturou jako

$$A = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}.$$

Věta

Platí rovnost

$$S\widetilde{N}S = S,$$

kde $S = N - MK^{-1}L$ je Schurův doplněk bloku K.

Díky předchozí větě můžeme psát $\widetilde{N} = S^+$.

Věta

Platí rovnost
$$S\widetilde{N}S = S,$$
kde $S = N - MK^{-1}L$ *je Schurův doplněk bloku* K.

Důkaz.

Uvažujme matice $X = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -MK^{-1} & I \end{bmatrix}$ a $Y = \begin{bmatrix} I & -K^{-1}L \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Přímým výpočtem dostaneme

$$XA = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -MK^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \\ 0 & N - MK^{-1}L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \\ 0 & S \end{bmatrix},$$
$$AY = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -K^{-1}L \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ M & N - MK^{-1}L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ M & S \end{bmatrix}.$$

Dále platí
$$XAY = (XA)Y = \begin{bmatrix} K & L \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -K^{-1}L \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

Zároveň ale dostaneme
$$XAY = X(AA^{+}A)Y = (XA)A^{+}(AY) = \begin{bmatrix} K & L \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{K} & \widetilde{L} \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ M & S \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \star & \star \\ S\widetilde{M} & S\widetilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ M & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & S\widetilde{N}S \end{bmatrix}.$$
□

Harmonické a diskrétně harmonické funkce

Definice

Řekneme, že funkce $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *je harmonická, platí-li*

$$\left(\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)\right) : \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Definice

Řekneme, že funkce $u^h \in V^h(\Omega)$ *je diskrétně harmonická, platí-li*

$$\left(\forall v^h \in V_0^h(\Omega)\right) : \int_\Omega \nabla u^h(x) \cdot \nabla v^h(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Důležitá vlastnost (diskrétně) harmonických funkcí

Věta

Nechť $u^h, w^h \in V^h(\Omega)$, $u^h_{|\partial\Omega} = w^h_{|\partial\Omega}$, *a nechť* u^h *je navíc diskrétně harmonická. Pak*

$$\int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega |\nabla w^h(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Zřejmě lze psát $w^h = u^h + v^h$, kde $v^h \in V_0^h(\Omega)$. S použitím definice diskrétně harmonické funkce dostaneme požadovanou nerovnost přímým výpočtem:

$$\int_\Omega |\nabla w^h(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u^h(x) + \nabla v^h(x)|^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2\,\mathrm{d}x + 2\underbrace{\int_\Omega \nabla u^h(x) \cdot \nabla v^h(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \underbrace{\int_\Omega |\nabla v^h(x)|^2\,\mathrm{d}x}_{\ge 0} \ge \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

□

Diskrétně harmonické funkce v řeči matic

Věta

Předpokládejme, že $u^h \in V^h(\Omega)$ má vyjádření $u^h = u_1\varphi_1 + \cdots + u_m\varphi_m$. Pak platí:

u^h je diskrétně harmonická, právě když

$$A_{II}u_I + A_{IB}u_B = 0.$$

Známe-li u diskrétně harmonické funkce u^h hodnoty v hraničních uzlech (vektor u_B), můžeme dopočítat hodnoty ve vnitřních uzlech (vektor u_I) pomocí vztahu

$$u_I = -(A_{II})^{-1}A_{IB}u_B.$$

Je-li $u^h \in V^h(\Omega)$ diskrétně harmonická, pak

$$\int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \, \mathrm{d}x = u^T A u = [u_I^T \;\; u_B^T] \begin{bmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ A_{BI} & A_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_B \end{bmatrix} = [u_I^T \;\; u_B^T] \begin{bmatrix} A_{II}u_I + A_{IB}u_B \\ A_{BI}u_I + A_{BB}u_B \end{bmatrix} =$$

$$= [u_I^T \;\; u_B^T] \begin{bmatrix} 0 \\ A_{BI}u_I + A_{BB}u_B \end{bmatrix} = u_B^T(A_{BI}u_I + A_{BB}u_B) = u_B^T(-A_{BI}(A_{II})^{-1}A_{IB}u_B + A_{BB}u_B) =$$

$$= u_B^T(-A_{BI}(A_{II})^{-1}A_{IB} + A_{BB})u_B = u_B^T S u_B.$$

Již víme, že pro diskrétně harmonickou funkci $u^h \in V^h(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \, \mathrm{d}x = u_B^T S u_B,$$

kde $S = A_{BB} - A_{BI}(A_{II})^{-1}A_{IB}$ je Schurův doplněk bloku A_{II} v matici tuhosti A.

Schurův doplněk S je symetrická pozitivně semidefinitní matice typu $m_B \times m_B$. Jádro matice S je opět jednodimenzionální a je generováno vektorem samých jedniček.

Vidíme tedy, že (regulární) číslo podmíněnosti matice S bude úzce souviset s diskrétně harmonickými funkcemi.

A proč nás zajímá číslo podmíněnosti matice S?

Uvidíme, že ze znalosti čísla podmíněnosti matice S dostaneme informaci o čísle podmíněnosti matice PFP. Ta se objevila v metodě TFETI, o které jsme se zmínili dříve.

Regulární číslo podmíněnosti matice S

Věta (horní odhad spektra matice S)

Každé vlastní číslo λ matice S splňuje nerovnost $\lambda \leq 3$.

Důkaz.

Předpokládejme, že λ je vlastní číslo matice S a $u_B \in \mathbb{R}^{m_B}$ je odpovídající vlastní vektor, tj. $Su_B = \lambda u_B$.

Uvažujme diskrétně harmonickou funkci $u^h \in V^h(\Omega)$, jejíž hodnoty v hraničních uzlech diskretizace odpovídají jednotlivým složkám vektoru u_B. Víme, že

$$\int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \,\mathrm{d}x = u_B^T S u_B = u_B^T \lambda u_B = \lambda \|u_B\|^2.$$

Dále uvažujme pomocnou funkci $w^h \in V^h(\Omega)$, pro kterou platí $w^h_{|\partial\Omega} = u^h_{|\partial\Omega}$ a která je ve všech vnitřních uzlech nulová.

Platí

$$\lambda \|u_B\|^2 = \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla w^h(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Nyní potřebujeme shora odhadnout integrál $\int_\Omega |\nabla w^h(x)|^2 \,\mathrm{d}x$.

Regulární číslo podmíněnosti matice S

Dokončení důkazu.

Lze ukázat, že

$$\int_\Omega |\nabla w^h(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq 3\|u_B\|^2,$$

což společně se vztahy

$$\lambda\|u_B\|^2 = \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla w^h(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

dává

$$\lambda\|u_B\|^2 \leq 3\|u_B\|^2.$$

Odtud (vlastní vektor je z definice nenulový) dostaneme požadovanou nerovnost

$$\lambda \leq 3.$$

□

Regulární číslo podmíněnosti matice S

Věta (dolní odhad kladné části spektra matice S)

Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}^+$ (nezávislá na h) taková, že každé kladné vlastní číslo λ matice S splňuje nerovnost $\lambda \geq \frac{1}{c}h$.

Důkaz.

Předpokládejme, že $\lambda > 0$ je vlastní číslo matice S a $u_B \in \mathbb{R}^{m_B}$ je odpovídající vlastní vektor, tj. $Su_B = \lambda u_B$. Vzhledem k tomu, že $\lambda \neq 0$, můžeme psát $u_B = \frac{1}{\lambda}Su_B$, což znamená, že $u_B \in \operatorname{Im} S$. Protože je obor hodnot symetrické matice kolmý na jádro (které je generované vektorem samých jedniček), znamená to, že

$$[1 \;\; 1 \;\; \dots \;\; 1]u_B = \sum_{j=1}^{m_B} (u_B)_j = 0. \qquad (\spadesuit)$$

Opět uvažujme diskrétně harmonickou funkci $u^h \in V^h(\Omega)$, jejíž hodnoty v hraničních uzlech odpovídají jednotlivým složkám vektoru u_B. Není těžké si rozmyslet, že podmínka ($\spadesuit$) znamená

$$\int_{\partial\Omega} u^h(x) \,\mathrm{d}s_x = 0.$$

Pokračování důkazu.

Nyní se použije vhodná verze Poincarého nerovnosti, která říká, že existuje konstanta $c_1 \in \mathbb{R}^+$ taková, že pro každou funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega \left(u(x)\right)^2 \mathrm{d}x \leq c_1 \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x + \left(\int_{\partial\Omega} Tu(x)\, \mathrm{d}s_x \right)^2 \right).$$

Podle věty o stopách existuje konstanta $c_2 \in \mathbb{R}^+$ taková, že pro každou funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ platí

$$\int_{\partial\Omega} \left(Tu(x)\right)^2 \mathrm{d}s_x \leq c_2 \left(\int_\Omega \left(u(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x \right).$$

Kombinací výše uvedených nerovností dostaneme, že pro každou diskrétně harmonickou funkci $u^h \in V^h(\Omega)$ splňující $\int_{\partial\Omega} u^h(x)\, \mathrm{d}s_x = 0$ platí

$$\int_{\partial\Omega} \left(u^h(x)\right)^2 \mathrm{d}s_x \leq c_2 \left(c_1 \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \underbrace{c_2(c_1+1)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} c_3} \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \mathrm{d}x = c_3 \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Konstanta c_3 přitom nezávisí na volbě funkce u^h ani na h.

Dokončení důkazu.

Víme, že

$$\int_{\partial\Omega} \left(u^h(x)\right)^2 \mathrm{d}s_x \leq c_3 \int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2 \mathrm{d}x = c_3 \left(u_B^T S u_B\right) = c_3 \left(u_B^T \lambda u_B\right) = c_3 \lambda \|u_B\|^2.$$

Protože je funkce u^h po částech lineární na $\partial\Omega$, není těžké si rozmyslet, že existuje konstanta $c_4 \in \mathbb{R}^+$ (nezávislá na h) taková, že pro každé $u^h \in V^h(\Omega)$ platí

$$\int_{\partial\Omega} \left(u^h(x)\right)^2 \mathrm{d}s_x \geq c_4 h \|u_B\|^2.$$

Odtud dostaneme nerovnost

$$c_4 h \|u_B\|^2 \leq c_3 \lambda \|u_B\|^2,$$

ze které ihned vyplývá odhad

$$\lambda \geq \tfrac{1}{c} h,$$

kde $c = \frac{c_3}{c_4}$ je kladná konstanta (nezávislá na h). □

Celkem jsme dostali, že pro každé nenulové vlastní číslo matice S platí odhad

$$\tfrac{1}{c} h \leq \lambda \leq 3.$$

Pokud by naše čtvercová oblast měla stranu H (doteď jsme předpokládali $H = 1$), odhad by se změnil na $\frac{1}{c}\frac{h}{H} \leq \lambda \leq 3$. Regulární číslo podmíněnosti matice S je proto řádově $\frac{H}{h}$.

Analýza konvergence metody TFETI

Nejdříve uveďme jednu užitečnou větu, kterou budeme potřebovat později.

Věta

Nechť A je nenulová reálná symetrická matice řádu $k \in \mathbb{N}$ s (reálnými) vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Předpokládejme přitom, že čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ $(1 \leq l \leq k)$ jsou nenulová, zatímco čísla $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_k$ jsou rovna nule. Dále nechť A^+ je libovolná matice splňující $AA^+A = A$. Pak pro každé $y \in \operatorname{Im} A$ platí

$$\min\left\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_l}\right\} \cdot \|y\|^2 \leq y^T A^+ y \leq \max\left\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_l}\right\} \cdot \|y\|^2.$$

Nyní se podíváme na to, jak souvisí číslo podmíněnosti Schurova doplňku S matice tuhosti s číslem podmíněnosti matice PFP, která se objevila v metodě TFETI.

Připomeňme, že

$$A = \mathrm{diag}(A^1, \dots, A^s), \quad B = \left[B^1,\, B^2,\, \dots,\, B^s\right],$$
$$F = BA^+B^T, \quad G = -R^TB^T,$$
$$A^+ = \mathrm{diag}((A^1)^+, \dots, (A^s)^+).$$

- Každý z bloků A^i má přitom blokovou strukturu $A^i = \begin{bmatrix} A^i_{II} & A^i_{IB} \\ A^i_{BI} & A^i_{BB} \end{bmatrix}$.
- Podobně lze psát $B^i = [B^i_I,\, B^i_B] = [0,\, B^i_B]$.
- Sloupce matice R tvoří bázi jádra matice A.
- Rozměr každé podoblasti A^i je H a disktretizační parametr je h.

Věta

Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}^+$ (nezávislá na H i h) taková, že pro každé $\mu \in \mathrm{Ker}\, G$ platí

$$\frac{1}{3}\|\mu\|^2 \le \mu^T F \mu \le c\,\frac{H}{h}\|\mu\|^2.$$

Věta

Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}^+$ (nezávislá na H i h) taková, že pro každé $\mu \in \mathrm{Ker}\, G$ platí

$$\frac{1}{3}\|\mu\|^2 \le \mu^T F \mu \le c\,\frac{H}{h}\|\mu\|^2.$$

Důkaz.

Podmínka $\mu \in \mathrm{Ker}\, G$ znamená, že $R^TB^T\mu = 0$. Proto je $B^T\mu$ kolmé na jádro matice A, a tedy $B^T\mu \in \mathrm{Im}\, A$. Z toho vyplývá, že pro každé $i \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\mathrm{Im}\, A^i \ni (B^i)^T\mu = \begin{bmatrix} (B^i_I)^T\mu \\ (B^i_B)^T\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (B^i_B)^T\mu \end{bmatrix},$$

což však znamená, že pro každé $i \in \{1, \dots, s\}$ je $(B^i_B)^T\mu \in \mathrm{Im}\, S^i$.
Přímým výpočtem dostaneme, že

$$\mu^T F\mu = \mu^T BA^+B^T\mu = \sum_{i=1}^{s} \mu^T B^i (A^i)^+ (B^i)^T \mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left[0, \mu^T B^i_B\right] \begin{bmatrix} (A^i)^+_{II} & (A^i)^+_{IB} \\ (A^i)^+_{BI} & (A^i)^+_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (B^i_B)^T\mu \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{s} \mu^T B^i_B \underbrace{(A^i)^+_{BB}}_{=(S^i)^+} (B^i_B)^T \mu.$$

$\mu^T F\mu = \sum_{i=1}^{s} \mu^T B_B^i (S^i)^+ (B_B^i)^T \mu, \quad \|(B_B^i)^T \mu\| = \|(B^i)^T \mu\|$

Dokončení důkazu.

$$\frac{1}{3}\|B^T\mu\|^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{s} \|(B_B^i)^T\mu\|^2 \le \mu^T F\mu \le c\,\frac{H}{h}\sum_{i=1}^{s}\|(B_B^i)^T\mu\|^2 = c\,\frac{H}{h}\|B^T\mu\|^2.$$

Protože má matice B ortonormální řádky ($BB^T = I$), dostaneme

$$\|B^T\mu\|^2 = \mu^T BB^T\mu = \mu^T I\mu = \mu^T\mu = \|\mu\|^2,$$

odkud ihned plyne

$$\frac{1}{3}\|\mu\|^2 \le \mu^T F\mu \le c\frac{H}{h}\|\mu\|^2.$$

□

Věta

Nechť λ je libovolné nenulové vlastní číslo matice PFP. Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}^+$ (nezávislá na H i h) taková, že

$$\frac{1}{3} \le \lambda \le c\frac{H}{h}.$$

$\mu \in \operatorname{Ker} G \implies \frac{1}{3}\|\mu\|^2 \le \mu^T F\mu \le c\frac{H}{h}\|\mu\|^2$

Věta

Nechť λ je libovolné nenulové vlastní číslo matice PFP. Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}^+$ (nezávislá na H i h) taková, že

$$\frac{1}{3} \le \lambda \le c\frac{H}{h}.$$

Důkaz.

Nechť λ je libovolné nenulové vlastní číslo matice PFP a μ je odpovídající vlastní vektor. To znamená, že $PFP\mu = \lambda\mu$, a tedy $\mu = \frac{1}{\lambda}PFP\mu \in \operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} G$.

Ze vztahů $P\mu = \mu$ a $P^T = P$ a z předchozí věty pak plynou nerovnosti

$$\frac{1}{3}\|\mu\|^2 \le \underbrace{\mu^T F\mu}_{\substack{=(P\mu)^T F(P\mu)= \\ =\mu^T PFP\mu = \mu^T\lambda\mu = \lambda\|\mu\|^2}} \le c\frac{H}{h}\|\mu\|^2,$$

ze kterých ihned dostaneme dokazované tvrzení. □

S_{FEM} vs. S_{BEM} (viz článek [5])

S_{FEM}:

$$\boxed{\text{Po částech lineární a spojitá funkce } u_B \text{ na } \partial\Omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Diskr. harmonické rozšíření } u^h \in V^h(\Omega), \text{ tzn. } u^h \text{ je diskr. harmonická na } \Omega \text{ a } u^h_{|\partial\Omega} = u_B}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{h}{H}\|u_B\|^2 \leq \underbrace{\langle S_{\mathrm{FEM}}(u_B), u_B\rangle}_{=\int_\Omega |\nabla u^h(x)|^2\,\mathrm{d}x} \leq 3\|u_B\|^2}$$

S_{BEM}:

$$\boxed{\text{Po částech lineární a spojitá funkce } u_B \text{ na } \partial\Omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Harmonické rozšíření } u \in W^{1,2}(\Omega), \text{ tzn. } u \text{ je harmonická na } \Omega \text{ a } Tu = u_B}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{h}{H}\|u_B\|^2 \leq \underbrace{\langle S_{\mathrm{BEM}}(u_B), u_B\rangle}_{=\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x} \leq \frac{3}{2}\|u_B\|^2}$$

Kvalita horního odhadu $\langle S_{\mathrm{FEM}}(u_B), u_B\rangle \leq 3\|u_B\|^2$

Pro jakou nejmenší konstantu $c_{\min}$ platí níže uvedená nerovnost?

$$\langle S_{\mathrm{FEM}}(u_B), u_B\rangle \leq c_{\min}\|u_B\|^2$$

Jak moc se optimální konstanta $c_{\min}$ liší od čísla 3?

Věta (viz článek [5])

Nechť kladná čísla H (strana čtvercové oblasti) a h (diskretizační parametr) splňují podmínku $4 \leq \frac{H}{h} \in \mathbb{N}$. Pak

$$\frac{\frac{48}{17}\frac{H}{h} - \frac{241}{68}}{\frac{H}{h} - 1} \leq c_{min} \leq 3.$$

Poznámka

Všimněme si, že při konstantním H platí

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\frac{48}{17}\frac{H}{h} - \frac{241}{68}}{\frac{H}{h} - 1} = \frac{48}{17} \doteq 2{,}82.$$

[1] Z. Dostál: Rozděl a slep aneb jak řešit soustavu s bilionem lineárních rovnic. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie,* **63** (2018), č. 1, 28–40.

[2] D. Lukáš, J. Bouchala, P. Vodstrčil, L. Malý: 2-dimensional primal domain decomposition theory in detail. *Applications of Mathematics,* **60** (2015), č. 3, 265–283.

[3] P. Vodstrčil, J. Bouchala, M. Jarošová, Z. Dostál: On conditioning of Schur complements of H-TFETI clusters for 2D problems governed by Laplacian. *Applications of Mathematics,* **62** (2017), č. 6, 699–718.

[4] Z. Dostál, D. Horák, T. Brzobohatý, P. Vodstrčil: Bounds on the spectra of Schur complements of large H-TFETI-DP clusters for 2D Laplacian. *Numerical Linear Algebra with Applications,* **28** (2021), č. 2.

[5] P. Vodstrčil, D. Lukáš, Z. Dostál, M. Sadowská, D. Horák, O. Vlach, J. Bouchala, J. Kružík: On favorable bounds on the spectrum of discretized Steklov-Poincaré operator and applications to domain decomposition methods in 2D. *Computers and Mathematics with Applications,* **167** (2024), 12–20.

Děkuji za pozornost.